4.4.3 Kosinová věta

Předpoklady: 040402

Př. 1: Rozhodni, zda dokážeme spočítat zbývající strany a úhly u všech trojúhelníků zadaných pomocí trojice prvků (délek stran a velikostí úhlů).

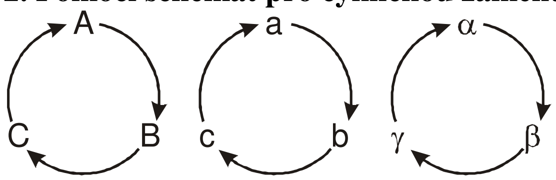
V sinové větě vystupují dvě dvojice strana-protější úhel. Jednu z nich musíme znát, druhou dopočítáváme. V případě, že známe dva úhly, můžeme dopočítat i třetí do sinové věty. Bez jedné dvojice strana-protější úhel počítat pomocí sinové věty nemůžeme $\Rightarrow$ všechny prvky trojúhelníku zatím nedokážeme dopočítat, když známe:

- všechny tři strany a žádný úhel (zadání $a; b; c$),
- dvě strany a úhel proti třetí straně.

Pro řešení úloh neřešitelných pomocí sinové věty existuje **věta kosinová**.

Př. 2: Najdi v tabulkách znění kosinové věty a s její pomocí vyřeš následující příklad. V trojúhelníku *ABC* urči zbývající strany a úhly, je-li dáno: $a = 28$; $c = 52$; $\beta = 81°$.

Kosinová věta je uvedena v tabulkách v části se vzorci v kapitole o planimetrii a goniometrii na straně 35 v tomto znění: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.
Ve vzorci z tabulek se vyskytuje úhel α, který neznáme, a určuje se strana *a*, kterou známe $\Rightarrow$ musíme vzorec přepsat pro naše zadání. Dvě možnosti:
1. Pomocí významu stran a úhlů
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ - stranu *a* určíme pomocí zbývajících stran a protějšího úhlu (obě zbývající strany můžeme ve vzorci libovolně zaměňovat) $\Rightarrow$ stranu *b* určíme také pomocí zbývajících stran (*a* a *c*) a protějšího úhlu β $\Rightarrow$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ - do tohoto vzorce již můžeme dosadit.
2. Pomocí schémat pro cyklickou záměnu (zkratka CZ v tabulkách)



Od strany *a* se ke straně *b* dostaneme jedním posunutím ve směru šipek (případně dvěma posunutími proti jejich směru).
Ze vzorce $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ získáme $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$ (stejný vzorec jako předtím, u sčítání ani násobení na pořadí nezáleží).

Určíme stranu *b*: $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$.

$b = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta}$

$b = \sqrt{52^2 + 28^2 - 2\cdot 52\cdot 28\cdot\cos 81°} = 55{,}07$

Úhel α určíme opět pomocí sinové věty: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ $\quad / \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

$a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha \quad / : b$

$\sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\beta}{b} = \frac{28\cdot\sin 81°}{55{,}07} \Rightarrow \alpha = 30°9'$

Druhou hodnotu úhlu nedopočítáváme. Strana *a* je nejkratší $\Rightarrow$ úhel α musí být nejmenší a nemůže tak být větší než $90°$.

$\gamma = 180° - (81° + 30°9') = 69°51'$

V trojúhelníku *ABC* platí: $a = 28$, $b = 55{,}07$, $c = 52$, $\alpha = 30°9'$, $\beta = 81°$, $\gamma = 69°51'$.

Př. 3: Zapiš kosinovou větu ve všech třech variantách (pro strany *a*, *b*, *c*).

Kosinová věta umožňuje určit stranu trojúhelníku pomocí zbývajících stran a protějšího úhlu $\Rightarrow$

- pro stranu *a* (zbývající strany *b*, *c*, protější úhel α): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$,
- pro stranu *b* (zbývající strany *c*, *a*, protější úhel β): $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$,
- pro stranu *c* (zbývající strany *a*, *c*, protější úhel γ): $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Poznámka: Stejný výsledek získáme i pomocí schémat pro cyklickou záměnu.

Pro každý trojúhelník *ABC* platí:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $\quad$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$ $\quad$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Př. 4: Z vět pro pravoúhlý trojúhelník najdi takovou, která má vztah ke kosinové větě. Urči tento vztah.

Kosinová věta připomíná větu Pythagorovu:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \qquad \text{x} \qquad c^2 = a^2 + b^2$

Rozdíl je v posledním členu, který u Pythagorovy věty chybí.
Zjistíme si hodnotu tohoto členu pro pravoúhlý trojúhelník.

$c^2 = a^2 + b^2$ $\Rightarrow$ strana *c* je přepona $\Rightarrow$ $\gamma = 90°$.

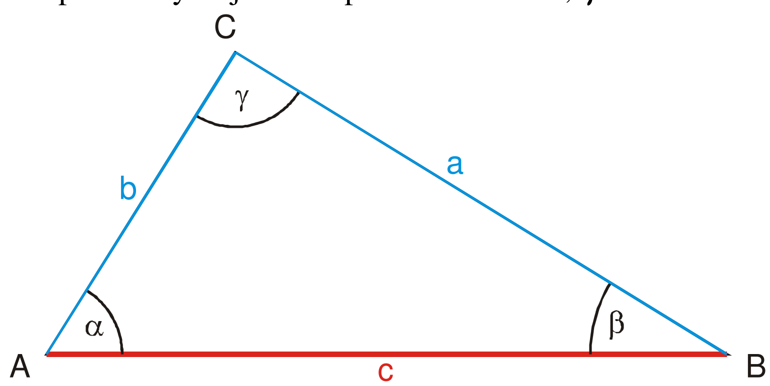
Dosadíme do kosinové věty:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\cos 90° = a^2 + b^2 - 2ab\cdot 0 = a^2 + b^2$

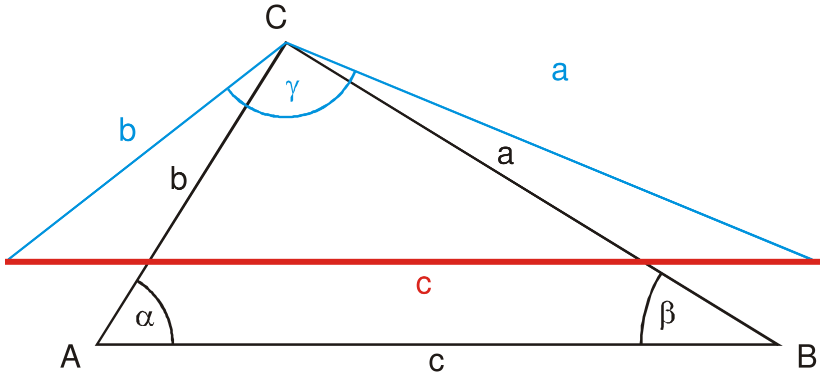
Kosinová věta přešla do věty Pythagorovy $\Rightarrow$

- Pythagorova věta je speciální případ věty kosinové pro pravoúhlý trojúhelník.
- Kosinová věta je zobecněním věty Pythagorovy pro obecný trojúhelník.

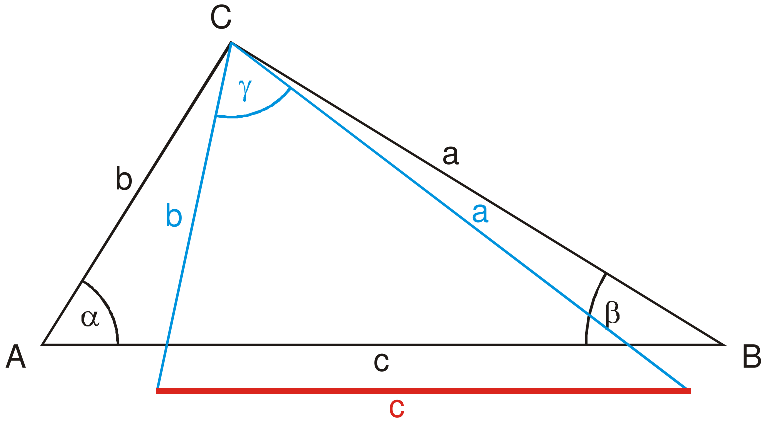
Dodatek: Předchozí příklad můžeme ještě rozvinout následující úvahou.
Pro pravoúhlý trojúhelník platí $c^2 = a^2 + b^2$, $\gamma = 90°$.



Zvětšíme úhel γ tak, aby platilo $90° < \gamma < 180°$. Pro výpočet c musíme použít kosinovou větu: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Ve vzorci přibyl výraz $-2ab\cos\gamma$, protože pro $\gamma \in (90°;180°)$, platí $\cos\gamma < 0 \Rightarrow$ výraz $-2ab\cos\gamma$ je kladný $\Rightarrow c$ vyjde větší než u pravoúhlého trojúhelníku. To samé napoví obrázek, ve kterém ponecháme strany a, b a zvětšíme úhel γ.



Zmenšíme úhel γ tak, aby platilo $0° < \gamma < 90°$. Pro výpočet c musíme použít kosinovou větu: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Ve vzorci přibyl výraz $-2ab\cos\gamma$, protože pro $\gamma \in (0°;90°)$, platí $\cos\gamma > 0 \Rightarrow$ výraz $-2ab\cos\gamma$ je záporný $\Rightarrow c$ vyjde menší než u pravoúhlého trojúhelníku. To samé napoví obrázek, ve kterém ponecháme strany a, b a zmenšíme úhel γ.



Př. 5: Trojúhelník ABC má délky stran 4, 5, 6. Urči velikosti jeho vnitřních úhlů.

Označíme si strany libovolným způsobem, například $a = 4$, $b = 5$ a $c = 6$.
Pomocí kosinové věty můžeme určit libovolný úhel, například úhel α.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = 0,75 \Rightarrow \alpha = 41°25'$

Další úhly bychom mohli určit pomocí kosinové věty, ale jednodušší bude použití věty sinové (snazší dosazení), kterou můžeme použít, protože už známe jednu dvojici strana-protější úhel.
Určíme úhel γ:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{a}\sin\alpha = \frac{6}{4}\sin 41°25' = 0,992$

$\gamma_1 = 82°49'$ $\qquad$ $\gamma_2 = 180° - \gamma_1 = 180 - 82°49' = 97°11'$

Dopočítáme úhel β_1:

$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow \beta=180°-(\alpha+\gamma)$

$\beta_1=180°-(41°25'+82°49')=55°46'$

Dopočítáme úhel β_2:

$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow \beta=180°-(\alpha+\gamma)$

$\beta_2=180°-(41°25'+97°11')=41°24'$

Strana b je větší než strana a proto i úhel β musí být větší než úhel α $\Rightarrow$ toto není řešení zadaného příkladu.

V trojúhelníku ABC platí: $a=4$, $b=5$, $c=6$, $\alpha=41°25'$, $\beta=55°46'$, $\gamma=82°49'$.

Př. 6: V trojúhelníku ABC urči zbývající strany a úhly, je-li dáno: $a=4,3$; $b=3,1$; $\gamma=57°31'$. Kosinovou větu využij i pro dopočítání druhého úhlu.

Použijeme kosinovou větu ve tvaru: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$

$c=\sqrt{4,3^2+3,1^2-2\cdot 4,3\cdot 3,1\cdot\cos 57°31'}=3,712$

Úhel α určíme opět pomocí kosinové věty: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

$2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3,1^2+3,712^2-4,3^2}{2\cdot 3,1\cdot 3,712}\doteq 0,212864 \Rightarrow \alpha=77°43'$$

$\beta=180°-(77°43'+57°31')=44°46'$

V trojúhelníku ABC platí: $a=4,3$, $b=3,1$, $c=3,712$, $\alpha=77°43'$, $\beta=44°46'$, $\gamma=57°31'$.

Úhel α bychom mohli určit také pomocí věty sinové (snazší dosazení), kterou můžeme použít, protože už známe jednu dvojici strana-protější úhel.

Určíme úhel α:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{a}{c}\sin\gamma$$

$$\sin\alpha=\frac{4,3}{3,712}\sin 57°31'$$

$\alpha_1=77°44'$

$\alpha_2=102°16'$

Strana a je nejdelší $\Rightarrow$ nemůžeme automaticky vyloučit hodnotu $\alpha_2=102°16'$.

Určíme úhel β:

$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow \beta=180°-(\alpha+\gamma)$

$\beta_1=180°-(77°44'+57°31')=44°45'$

$\beta_2=180°-(102°16'+57°31')=20°13'$

Zdá se, že jsme získali dvě řešení, což je divné:

- při řešení pomocí kosinové věty jsme získali jedno řešení a nezdá se, že bychom na něco zapomněli - funkce $\cos x$ je pro úhly od $0°$ do $180°$ prostá a nemuseli jsme pro úhel α dopočítávat druhou variantu (kosinus úhlu $\alpha_2=102°16'$ by byl záporný),
- než jsme začali počítat velikost úhlu α, znali jsme všechny tři strany trojúhelníka (takový trojúhelník je určený jednoznačně a nemůžeme tedy najít dvě varianty pro úhel α.)

Provedeme zkoušku pomocí sinové věty:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\Rightarrow\frac{4,3}{\sin 77°44'}=\frac{3,1}{\sin 44°45'}\Rightarrow 4,400 \doteq 4,403$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin b}\Rightarrow\frac{4,3}{\sin 77°44'}=\frac{3,1}{\sin 20°13'}\Rightarrow 4,400 \neq 8,971 \Rightarrow$$ druhé řešení je pouze zdánlivé.

Skutečnost, že bezpečnější je používat kosinovou větu si můžeme ukázat na trojúhelníku *ABC*, kde je dáno: $a=4,3$; $b=1,521$; $\gamma=57°31'$.

Určíme stranu *c*: $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}=\sqrt{4,3^2+3,1^2-2\cdot 4,3\cdot 3,1\cdot\cos 57°31'}=3,712$

Úhel α určíme opět pomocí kosinové věty: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1,521^2+3,712^2-4,3^2}{2\cdot 1,521\cdot 3,712}=-0,21233\Rightarrow\alpha=102°16'$$

$\beta=180°-(102°16'+57°31')=20°13'$ (získaný trojúhelník tedy odpovídá druhému - nevyhovujícímu řešení při použití sinové věty v předchozím příkladu).

Úhel α bychom mohli určit také pomocí věty sinové (snazší dosazení), kterou můžeme použít, protože už známe jednu dvojici strana-protější úhel.

Pro kontrolu:

Určíme úhel α: $\sin\alpha=\frac{4,3}{3,712}\sin 57°31'$ (to samé jako v původním příkladu)

$\alpha_1=77°44'$

$\alpha_2=102°16'$

Určíme úhel β:

$\alpha+\beta+\gamma=180°\Rightarrow\beta=180°-(\alpha+\gamma)$

$\beta_1=180°-(77°44'+57°31')=44°45'$

$\beta_2=180°-(102°16'+57°31')=20°13'$

Tentokrát kontrolou vyloučíme větší úhel β (a s ním menší úhel α). Tedy přesně obráceně než u trojúhelníku z příkladu 6.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin b}\Rightarrow\frac{4,3}{\sin 102°16'}=\frac{1,521}{\sin 44°45'}\Rightarrow 4,4005\neq 2,1605\Rightarrow$$ první řešení je pouze zdánlivé.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin b}\Rightarrow\frac{4,3}{\sin 102°16'}=\frac{1,521}{\sin 20°13'}\Rightarrow 4,4005\doteq 4,4014.$$

Existuje způsob, jak se problémům při dopočítávání trojúhelníku po použití kosinové věty vyhnout?

Dvě možnosti:

- i druhý úhel dopočítat pomocí kosinové věty (jako v řešení příkladu 6),
- při dopočítávání přes sinovou větu, počítat úhel naproti menší straně (u příkladu 6 strana *b*), protože její úhel musí být také menší a tím pádem menší než $90°$ (čímž vypadne druhá velikost úhlu se správnou hodnotou sinus).

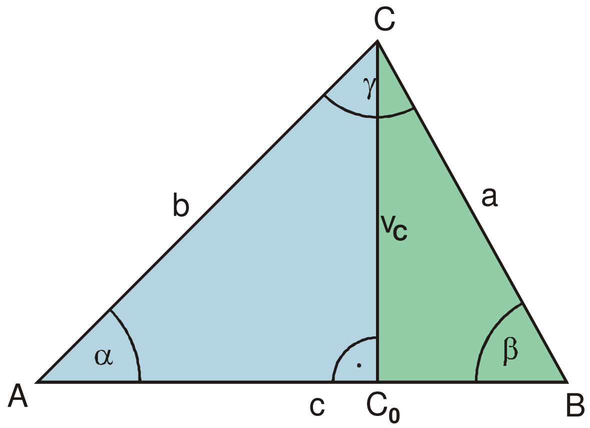
Dodatek: Na upozornění na předchozí závěr děkuji Janu Kuchaříkovi.

Na závěr si necháme důkaz:

Důkaz kosinové věty bude mít opět tři části pro různé druhy trojúhelníků.

Budeme dokazovat tvar $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

1. ostroúhlý trojúhelník:



Z pravoúhlého trojúhelníku BCC_0 víme: $a^2 = |CC_0|^2 + |BC_0|^2$.

Výraz na pravé straně musíme napsat pomocí a, b, c a α.

Určíme $|BC_0|$**:** platí: $|BC_0| = c - |AC_0|$, z pravoúhlého trojúhelníku ACC_0:

$\cos\alpha = \dfrac{|AC_0|}{b} \Rightarrow |AC_0| = b \cdot \cos\alpha$, tedy $|BC_0| = c - b \cdot \cos\alpha$.

Určíme $|CC_0|$**:** z pravoúhlého trojúhelníku ACC_0: $\sin\alpha = \dfrac{|CC_0|}{b} \Rightarrow |CC_0| = b \cdot \sin\alpha$,

tedy $|CC_0| = b \cdot \sin\alpha$.

Dosadíme:

$$a^2 = |CC_0|^2 + |BC_0|^2 = (b \cdot \sin\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos\alpha)^2 = b^2 \cdot \sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2 \cdot \cos^2\alpha =$$

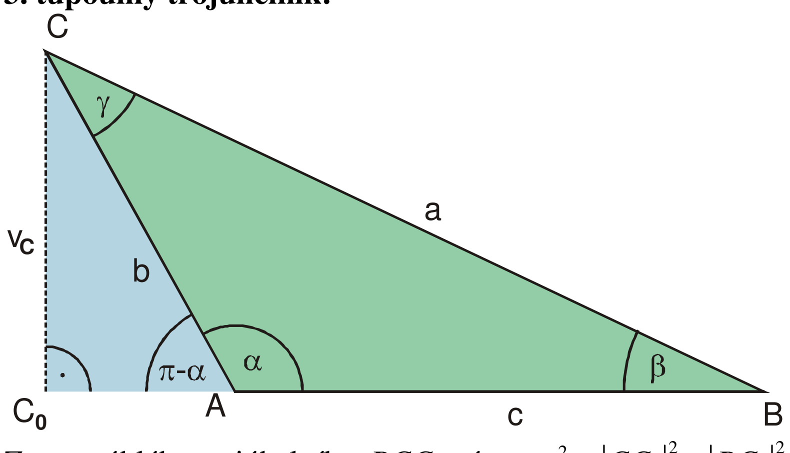
$$= b^2 \cdot \sin^2\alpha + b^2 \cdot \cos^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 \cdot \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$= b^2 \cdot 1 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

2. pravoúhlý trojúhelník

Už máme dokázáno v úvaze o porovnání Pythagorovy věty a kosinové věty.

3. tupoúhlý trojúhelník:



Z pravoúhlého trojúhelníku BCC_0 víme: $a^2 = |CC_0|^2 + |BC_0|^2$.

Výraz na pravé straně musíme napsat pomocí a, b, c a α.

Určíme $|BC_0|$: platí: $|BC_0| = c + |AC_0|$, z pravoúhlého trojúhelníku ACC_0:

$\cos(\pi - \alpha) = \frac{|AC_0|}{b} \Rightarrow |AC_0| = b \cdot \cos(\pi - \alpha)$. Pomocí součtových vzorců:

$\cos(\pi - \alpha) = \cos\pi\cos\alpha + \sin\pi\sin a = (-1)\cdot\cos\alpha + 0\cdot\sin a = -\cos\alpha$

$|AC_0| = -b\cdot\cos\alpha$, tedy $|BC_0| = c + |AC_0| = c + (-b\cdot\cos\alpha) = c - b\cdot\cos\alpha$.

Určíme $|CC_0|$: z pravoúhlého trojúhelníku ACC_0:

$\sin(\pi - \alpha) = \frac{|CC_0|}{b} \Rightarrow |CC_0| = b\cdot\sin(\pi - \alpha)$. Pomocí součtových vzorců:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin a = 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin a = \sin\alpha$,

tedy $|CC_0| = b\cdot\sin\alpha$.

Dosadíme:

$a^2 = |CC_0|^2 + |BC_0|^2 = (b\cdot\sin\alpha)^2 + (c - b\cdot\cos\alpha)^2 = b^2\cdot\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cdot\cos^2\alpha =$

$= b^2\cdot\sin^2\alpha + b^2\cdot\cos^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2\cdot(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$= b^2\cdot 1 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Př. 7: Petáková:
strana 49/cvičení 76 a) b) c)
strana 49/cvičení 82
strana 49/cvičení 86 a)

Shrnutí: Kosinová věta je zobecněním věty Pythagorovy.